

# Studie zu Kräften an Grenzflächen in Feldern

## 1 Die Spannung an Grenzflächen in Magnetfeldern

Die Energiedichte eines magnetischen Feldes ist bei Stoffen mit konstanter Permeabilität gegeben durch [2]

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} B \cdot H \quad (1.1)$$

Die Energiedichte  $w$  ist eine skalare Größe und hat die Einheit

$$[B \cdot H] = \frac{Vs}{m^2} \frac{A}{m} = \frac{Ws}{m^3}$$

Dies kann man aber auch als Kraft pro Fläche schreiben:

$$[B \cdot H] = \frac{Ws}{m^3} = \frac{N}{m^2}$$

Nach dieser Interpretation herrscht im magnetischen Feld ein Druck, d. h. Energiedichten haben die Einheit des Drucks. Diese mechanische Spannung  $\sigma$  wird auch als Maxwellspannung bezeichnet.

An den Grenzflächen von Medien mit unterschiedlicher Permeabilität subtrahieren sich die mechanischen Spannungen [1]. Unabhängig vom Feldverlauf wirken die Spannungen stets senkrecht auf die Grenzfläche. Es sei  $\mathbf{n}_{12}$  der Normalenvektor auf einer Grenzfläche, der von einem Gebiet mit der Permeabilität  $\mu_1$  in Richtung eines Gebietes mit einer kleineren Permeabilität  $\mu_2$  zeigt, dann wirkt die resultierende Spannung in Richtung von  $\mathbf{n}_{12}$ .

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} |B_1 \cdot H_1 - B_2 \cdot H_2| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.2)$$

In dieser Form ist  $\sigma_{12}$  eine Vektorgröße. Bei  $\mu_1 > \mu_2$  zeigt die Spannung vom Gebiet 1 nach 2. Die Richtung der Felder spielt dabei keine Rolle. In technischen Fragestellungen ist es aber manchmal vorteilhaft, Tangential- und Normalkomponenten der Felder zu unterscheiden, d. h. man definiert Spannungen mit Normalkomponenten

$$\sigma_{12}^n = \frac{1}{2} |B_{n1} \cdot H_{n1} - B_{n2} \cdot H_{n2}| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.3)$$

und mit tangentialen Komponenten

$$\sigma_{12}^t = \frac{1}{2} |B_{t1} \cdot H_{t1} - B_{t2} \cdot H_{t2}| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.4)$$

Für die normalen und tangentialen Komponenten von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$B_{n1} = B_{n2} = B_n \quad \mu_2 B_{t1} = \mu_1 B_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2} = H_t \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \quad \text{sowie} \quad \mu H = B \quad (1.5)$$

Damit erhält Gl. 1.3 für die Normalkomponenten von folgende Form:

$$\sigma_{12}^n = \frac{1}{2} |B_{n1} H_{n1} - B_{n2} H_{n2}| \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} |B_n (H_{n1} - H_{n2})| \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} B_n^2 \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.6)$$

Nach Auflösung des Betrages und mit und  $\mu_1 > \mu_2$  ergibt sich:

$$\sigma_{12}^n = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.7)$$

Die Entwicklung für die Tangentialkomponenten folgt dem gleichen Schema:

$$\sigma_{12}^t = \frac{1}{2} (B_{t1} H_{t1} - B_{t2} H_{t2}) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.8)$$

und mit  $H_{t1} = H_{t2} = H_t$  von Gln. 1.5:

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{2} H_t (B_{t1} - B_{t2}) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.9)$$

Mit den Gln. 1.5 hat man:

$$H_t = \frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2} \quad \text{und} \quad B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1}$$

und kann für Gl. 1.9 schreiben:

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{B_{t1}}{\mu_1} \left( B_{t1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2} B_{t1}^2 \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.10)$$

Die Gesamtspannung ist die Summen der Anteile der Gln. 1.7 und 1.10, die beide in Richtung von  $\mathbf{n}_{12}$  weisen. Man erhält:

$$\sigma_{12} = \sigma_{12n} + \sigma'_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2} B_{t1}^2 \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \left\{ B_n^2 + \mu_2 \frac{B_{t1}^2}{\mu_1} \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.12)$$

Diese Gleichung kann mit  $B_n = \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$  und  $B_{t1} = \mu_1 H_{t1} = \mu_2 H_{t2}$  gemäß Gln. 1.5 auch einfacher mit Hilfe der Feldstärke  $H$  geschrieben werden:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) \left\{ H_{n1} H_{n2} + H_t^2 \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.13)$$

Die Richtung der mechanischen Spannung ist, wie schon erwähnt, stets senkrecht zur Grenzfläche. Abschließend wird der häufig vorkommende Fall einer Grenzfläche zwischen Eisen und betrachtet. In diesen Fall ist  $\mu_1 = \mu_{Fe} \mu_0$  die Permeabilität von Eisen mit der relativen Permeabilität  $\mu_{Fe}$  und  $\mu_2 = \mu_0$  derjenigen von Luft. Außerdem wird die Schreibweise  $B_n = B_{nFe} = B_{nL}$  und  $B_{t1} = B_{tFe}$  verwendet.

Für Gl. 1.12 ergibt sich damit:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe} \mu_0 - \mu_0}{\mu_{Fe} \mu_0 \mu_0} \left\{ B_{nFe}^2 + \mu_0 \frac{B_{tFe}^2}{\mu_{Fe} \mu_0} \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (1.14)$$

und schließlich

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe} \mu_0} \left\{ B_{nFe}^2 + \frac{B_{tFe}^2}{\mu_{Fe}} \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \quad (1.15)$$

Gl. 1.15 zeigt, daß Tangentialkomponenten der Felder um den Faktor  $1/\mu_{Fe}$  schwächer wirken als die Normalkomponenten. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich mit  $\mu_{Fe} \gg 1$ . Für diesen Fall sind die Komponenten von Gl. 1.14 im Kapitel *Magnetische Kräfte* in [5] angegeben.

## 2 Grenzflächenkräfte über Streßtensor

Der Maxwellsche Stress Tensor [3] bietet die Möglichkeit, Kräfte elektrischer und magnetischer Felder zu berechnen. Der Tensor ergibt sich aus der Lorenzkraft und den Maxwellschen Gleichungen.

Betrachtet wird eine Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern mit den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  im elektrischen Feld. Um die Grenzfläche wird eine kleine Hüllfläche gelegt, die oben und

unten die Fläche  $\Delta A$  besitzt, während die Seitenflächen so schmal sein sollen, daß sie vernachlässigbar sind. Die Hüllfläche wird im oberen Bereich durch die Feldstärke  $E_1$  durchsetzt im Winkel  $\alpha_1$  zur Normalen. In Bild 2.1 sind  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}$  die Einheitsvektoren in Normal- und Tangentialrichtung zum oberen Flächenelement.

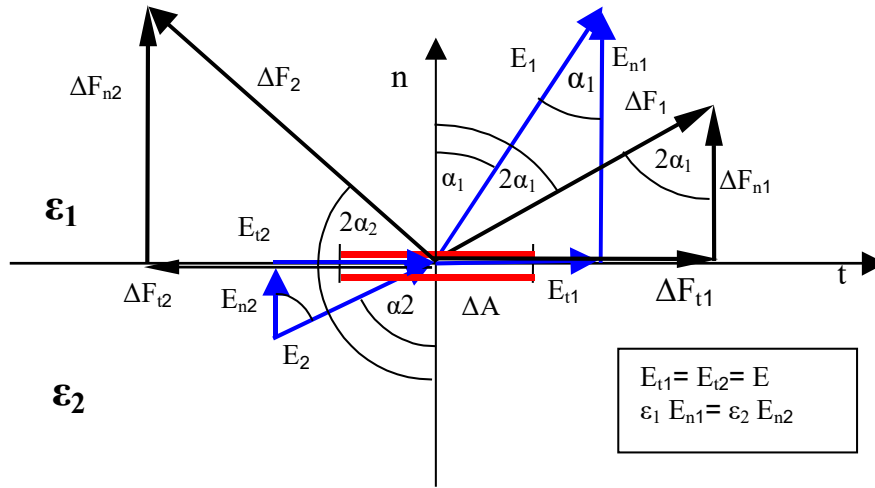


Bild 2.1: Felder und Kräfte an einer Grenzfläche mit  $\epsilon_2 > \epsilon_1$

Infolge des elektrischen Feldes  $E$  entstehen an der Grenzfläche Kräfte, die mit dem Maxwell'schen Streßtensor berechnet werden können. Dieser Tensor lautet im ebenen Fall von Bild 2.1

$$\mathbf{T} = \epsilon \cdot \begin{bmatrix} E_t^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_t E_n \\ E_n E_t & E_n^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Darin sind  $E_t$  und  $E_n$  die Feldkomponenten von  $E$  in tangentialer und in normaler Richtung. Die Kraft infolge des Feldes kann berechnet werden, indem das Integral über den Tensor über eine geschlossene Hüllfläche gebildet wird:

$$\mathbf{F} = \oint_A \mathbf{T} d\mathbf{A} \quad d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA \quad (2.2)$$

Die Auswertung des Integrals reduziert sich auf ein Produkt, wenn die Flächen klein genug gewählt werden. Im Gebiet 1 hat die Hüllfläche die Form

$$\Delta \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta A \end{bmatrix} \quad \text{und im Gebiet 2} \quad \Delta \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta A \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Flächen in tangentialer Richtung sollen so klein sein, daß sie vernachlässigt werden können. Die Kraft läßt sich dann beschreiben durch

$$\Delta \mathbf{F} = \oint_A \mathbf{T} d\mathbf{A} = \Delta \mathbf{F}_1 + \Delta \mathbf{F}_2 = \mathbf{T}_1 \Delta \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_2 \Delta \mathbf{A}_2 \quad (2.4)$$

### Kraft auf die Fläche $\Delta A$ im Gebiet 1

Die Kraft auf das Flächenelement im Gebiet 1 hat die Größe

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} E_{t1}^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_{t1} E_{n1} \\ E_{n1} E_{t1} & E_{n1}^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta A \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Man erhält also den Kraftvektor

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} E_{t1} E_{n1} \Delta A \\ \left( E_{n1}^2 - \frac{1}{2} E_1^2 \right) \Delta A \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Mit den Einheitsvektoren geschrieben hat die Kraft die Form

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \varepsilon_1 E_{t1} E_{n1} \Delta A \cdot \vec{t} + \varepsilon_1 \left( E_{n1}^2 - \frac{1}{2} E_1^2 \right) \Delta A \cdot \vec{n} \quad (2.7)$$

Die Tangentialkomponente ist also

$$\Delta F_{t1} = \varepsilon_1 E_{t1} E_{n1} \Delta A \quad (2.8)$$

Mit dem Winkel  $\alpha_1$  zwischen Feldstärke und Normale nach Bild 2.1 läßt sich das umformen zu

$$\Delta F_{t1} = \varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 E_1 \sin \alpha_1 \cdot \Delta A = \varepsilon_1 E_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cdot \Delta A = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \sin 2\alpha_1 \cdot \Delta A \quad (2.9)$$

Dabei wurde von der trigonometrischen Formel

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.10)$$

Gebrauch gemacht.

Die Normalkomponente lautet

$$\Delta F_{n1} = \varepsilon_1 \frac{1}{2} (E_{n1}^2 - E_{t1}^2) \cdot \Delta A \quad (2.11)$$

Deren Umformung ergibt

$$\Delta F_{n1} = \varepsilon_1 \frac{1}{2} (E_1^2 \cos^2 \alpha_1 - E_1^2 \sin^2 \alpha_1) \cdot \Delta A = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \cos 2\alpha_1 \cdot \Delta A \quad (2.12)$$

mit der geometrischen Beziehung

$$\cos 2\alpha_1 = \cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1 \quad (2.13)$$

#### 1.7 Kräfte und Drehmomente

67

**Abb. 1.46** Zur Bildung der Flächenspannung  $\vec{p}$ , wirkend im Flächenelement  $dA$  der (geschlossenen) Hüllfläche. Der Betrag von  $\vec{p}$  ist durch Gl. (1.108) bestimmt;  $\vec{p}$  liegt in der vom Feldvektor und der Flächennormalen  $\vec{n}$  aufgespannten Ebene, die Richtung entsteht durch Klappen von  $\vec{n}$  um den Feldvektor

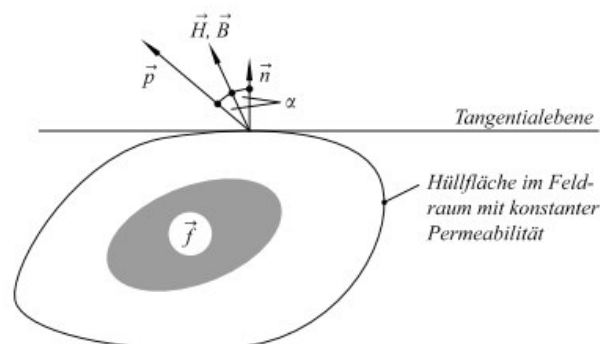


Bild 2.2: Abbildung aus dem Buch von Ekkehard Bolte [4]

Der Betrag von  $\Delta F_1$  hat die Größe

$$\Delta F_1^2 = \Delta F_{t1}^2 + \Delta F_{n1}^2 = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \sin 2\alpha_1 \cdot \Delta A \right)^2 + \left( \varepsilon_1 \frac{1}{2} E_1^2 \cos 2\alpha_1 \cdot \Delta A \right)^2$$

$$\Delta F_1^2 = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \Delta A \right)^2 (\sin^2 2\alpha_1 + \cos^2 2\alpha_1) = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \Delta A \right)^2$$

$$\Delta F_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \Delta A \quad (2.14)$$

Mit den Gln. 2.9, 2.12 und 2.14 wird ersichtlich, daß der Vektor  $\Delta \mathbf{F}_1$  gegen die Normale um den Winkel  $2\alpha_1$  verdreht ist, wie Bild 2.1 zeigt. Dies erklärt das Bild 1.46 aus dem Buch von Bolte, da der Streßtensor für magnetische Felder ganz analog zu dem der elektrischen Felder aufgebaut ist.

### Kräfte auf das Flächenelement im unteren Halbfeld

Im unteren Halbfeld ist die Flächennormale nach unten gerichtet

$$\Delta \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta A \end{bmatrix}$$

Die Kraft ergibt sich daher aus der Beziehung

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} E_{n_2}^2 - \frac{1}{2} E_2^2 & E_{n_2} E_{t_2} \\ E_{n_2} E_{t_2} & E_{t_2}^2 - \frac{1}{2} E_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta A \end{bmatrix} = -\varepsilon_2 \begin{bmatrix} E_{t_2} E_{n_2} \\ E_{n_2}^2 - \frac{1}{2} E_2^2 \end{bmatrix} \cdot \Delta A \quad (2.15)$$

Die Tangentialkomponente beträgt also

$$\Delta F_{t_2} = -\varepsilon_2 E_t E_{n_2} \Delta A \quad (2.16)$$

Dies läßt sich mit Gl. 2.10 wieder umformen zu

$$\Delta F_{t_2} = -\varepsilon_2 E_2 \sin \alpha_2 E_2 \cos \alpha_2 \Delta A = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \sin 2\alpha_2 \quad (2.17)$$

Die Normalkomponente lautet

$$\Delta F_{n_2} = -\varepsilon_2 \frac{1}{2} (E_{n_2}^2 - E_t^2) \cdot \Delta A \quad (2.18)$$

und ergibt mit Gl. 2.13 umgeformt

$$\begin{aligned} \Delta F_{n_2} &= -\varepsilon_2 \frac{1}{2} (E_2^2 \cos^2 \alpha_2 - E_2^2 \sin^2 \alpha_2) \cdot \Delta A \\ \Delta F_{n_2} &= -\varepsilon_2 \frac{1}{2} E_2^2 \cos 2\alpha_2 \cdot \Delta A \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wie zuvor bedeutet das in Vektorschreibweise

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \Delta F_{t_2} \vec{t} + \Delta F_{n_2} \vec{n} = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \sin 2\alpha_2 \cdot \Delta A \cdot \vec{t} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \cos 2\alpha_2 \cdot \Delta A \cdot \vec{n} \quad (2.20)$$

Der Betrag von  $\Delta \mathbf{F}_2$  ergibt sich zu

$$\Delta F_2 = \sqrt{\Delta F_{t_2}^2 + \Delta F_{n_2}^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \Delta A \quad (2.21)$$

Die Gleichungen 2.17, 2.19 und 2.21 besagen, daß auch der Vektor  $\Delta \mathbf{F}_2$  um den Winkel  $2\alpha_2$  gegen die Normal verdreht ist, wie es Bild 2.1 zeigt. Zwischen Gl. 2.19 und Bild 2.1 scheint ein Widerspruch zu bestehen, da die Normalkomponente von  $\Delta \mathbf{F}_2$  ein negatives Vorzeichen hat, aber im Bild positiv erscheint. Das Vorzeichen von  $\cos 2\alpha_2$  kehrt sich jedoch um, sobald  $\alpha_2 > 45^\circ$  ist.

### Resultierende Kraft am Grenzflächenelement

Die resultierende Kraft an der Grenzfläche ergibt nach Gl. 2.4 sich aus der Summe von  $\Delta \mathbf{F}_1$  und  $\Delta \mathbf{F}_2$ .

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \Delta \mathbf{F}_1 + \Delta \mathbf{F}_2 = \\ &\varepsilon_1 E_{t_1} E_{n_1} \Delta A \cdot \vec{t} + \varepsilon_1 \left( E_{n_1}^2 - \frac{1}{2} E_1^2 \right) \Delta A \cdot \vec{n} - \varepsilon_2 E_t E_{n_2} \Delta A \cdot \vec{t} - \varepsilon_2 \frac{1}{2} (E_{n_2}^2 - E_t^2) \Delta A \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die resultierende Kraft in Tangentialrichtung mit  $E_{t1} = E_{t2} = E_t$  ist:

$$\Delta F_t = \Delta F_{t1} + \Delta F_{t2} = \varepsilon_1 E_t E_{n1} \Delta A - \varepsilon_2 E_t E_{n2} \Delta A = (\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2}) E_t \Delta A_y = 0 \quad (2.23)$$

da die Kontinuitätsbedingung  $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$  gilt.

Als resultierende Kraft in Normalenrichtung erhält man

$$\begin{aligned} \Delta F_n &= \Delta F_{n1} \vec{n} + \Delta F_{n2} \vec{n} = \varepsilon_1 \frac{1}{2} (E_{n1}^2 - E_t^2) \Delta A \vec{n} - \varepsilon_2 \frac{1}{2} (E_{n2}^2 - E_t^2) \Delta A \vec{n} \\ &= \frac{1}{2} \Delta A (\varepsilon_1 E_{n1}^2 - \varepsilon_1 E_t^2 - \varepsilon_2 E_{n2}^2 + \varepsilon_2 E_t^2) \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_n &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 E_{n1} E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} E_{n2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2) \Delta A \vec{n} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 E_{n1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{n2} - \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1} E_{n2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2 \right) \Delta A \vec{n} = \\ &= \frac{1}{2} ((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_{n1} E_{n2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2) \Delta A \vec{n} \\ \Delta F_n &= \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (E_{n1} E_{n2} + E_t^2) \cdot \Delta A \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1}^2 + E_t^2 \right) \cdot \Delta A \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die resultierende Kraft in Tangentialrichtung verschwindet also, und es verbleibt die Normalkraft senkrecht zum Flächenelement. Diese Kraft ist nach oben gerichtet, wenn  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  gilt. Das ist z. B. der Fall, wenn das Gebiet 1 aus Luft besteht und das Gebiet 2 aus Kunststoff mit  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ .

Die mechanische Spannung an der Grenzfläche ist gegeben durch

$$\sigma_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta A_n} = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (E_{n1} E_{n2} + E_t^2) \cdot \vec{n} \quad (2.26)$$

Dies ist analog das gleiche Ergebnis, das mit Gl. 1.13 für die magnetischen Felder gefunden wurde.

### 3 Kräfte an Grenzflächen nach Küpfmüller

Im Abschnitt 14.3 des Buches von Küpfmüller [2] werden Kräfte an Grenzflächen zwischen Nichtleitern in elektrischen Feldern berechnet. Da die Darstellung nicht als transparent erscheint, wird die Herleitung hier überarbeitet. Zunächst gehört zu dieser Überarbeitung, daß in der Grafik ein kleinerer Winkel  $\alpha_1$  gewählt wird, damit der Kraftvektor  $\Delta F_{n1}$  nach oben gerichtet ist, wie der Text des Buches behauptet.

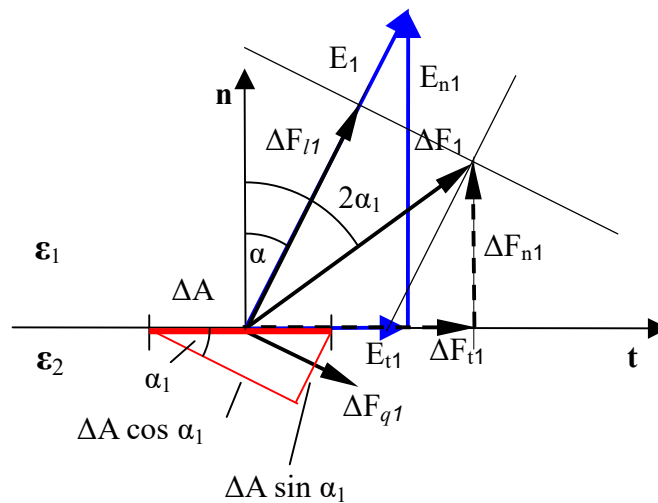


Bild 3.1: Kraftwirkung auf ein Flächenelement  $\Delta A$  an einer Grenzfläche

Betrachtet wird ein Flächenelement  $\Delta A$  an der Grenze zwischen zwei Nichtleitern mit den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ . Die Einheitsvektoren  $n$  und  $t$  geben die Normal- und die Tangentialrichtung zum Flächenelement an.

Im Gebiet 1 existiert durch das Feld  $E_1$  bedingt die mechanische Spannung  $\sigma_1$ .

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \quad (3.1)$$

Die Feldstärke  $E_1$  wirkt unter dem Winkel  $\alpha_1$  gegen die Senkrechte auf das Flächenelement  $\Delta A$ . Die Betrachtung geht davon aus, daß in Richtung des Feldes  $E_1$  eine Längskraft  $\Delta F_{l1}$  (in das Gebiet hinein) sowie senkrecht dazu eine Querkraft  $\Delta F_{q1}$  wirken. Diese weist vom Gebiet 1 weg. Für den Ansatz dieser Kräfte wird keine Begründung angegeben. Die Zerlegung eines Vektors in diese Komponenten ist jedoch nicht verkehrt. Die Kräfte haben bedingt durch die wirksame Fläche von  $\Delta A$  (siehe rotes Dreieck in Bild 3.1) die Größe

$$\Delta F_{l1} = \sigma_1 \Delta A \cos \alpha_1 \quad \text{und} \quad (3.2)$$

$$\Delta F_{q1} = \sigma_1 \Delta A \sin \alpha_1 \quad (3.3)$$

Beide Kräfte setzen sich zu einer Resultierenden  $\Delta F_1$  zusammen, d. h.

$$\Delta F_1^2 = \Delta F_{l1}^2 + \Delta F_{q1}^2 = (\sigma_1 \Delta A)^2 \cos^2 \alpha_1 + (\sigma_1 \Delta A)^2 \sin^2 \alpha_1 = (\sigma_1 \Delta A)^2$$

Diese Resultierende hat also wie in Gl. 2.14 den Betrag

$$\Delta F_1 = \sigma_1 \Delta A = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \Delta A \quad (3.4)$$

Aufgrund der Ähnlichkeit des Kräftedreiecks mit den Kanten  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_{l1}$ ,  $\Delta F_{q1}$  zum roten Flächen-dreieck beträgt der Winkel von  $\Delta F_1$  zu  $E_1$  ebenfalls  $\alpha_1$ , und ist damit der gleiche Winkel, wie ihn  $E_1$  zur Normalen hat.

Die Normalkomponente ist im Bild 3.1 nach oben gerichtet und beträgt

$$\Delta F_{n1} = \Delta F_1 \sin(90^\circ - 2\alpha_1) = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \Delta A \cos 2\alpha_1 \quad (3.5)$$

Die Tangentialskomponente von  $\Delta F_1$  ist nach rechts gerichtet und lautet

$$\Delta F_{t1} = \Delta F_1 \cos(90^\circ - 2\alpha_1) = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \Delta A \sin 2\alpha_1 \quad (3.6)$$

Die Gesamtkraft  $\Delta F_1$  bildet mit der Normalen der Grenzfläche den Winkel  $2\alpha$ . Der Winkel mit der Normalen wird durch die Richtung von  $E_1$  halbiert. Vektoriell kann man schreiben:

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \Delta F_{n1} \vec{n} + \Delta F_{t1} \vec{t} = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \cos 2\alpha_1 \Delta A \cdot \vec{n} + \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_1^2 \sin 2\alpha_1 \Delta A \cdot \vec{t} \quad (3.7)$$

Entsprechende Kräfte wirken im Gebiet 2 von der anderen Seite auf  $\Delta A$ . Dazu werden im Buch keine Einzelheiten angegeben. Im Folgendem wird der Versuch unternommen, die fehlenden Informationen nachzuarbeiten.

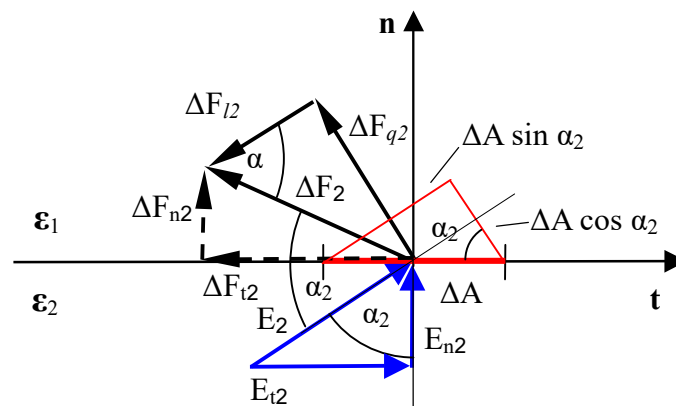


Bild 3.2: Kräfte und Felder im Gebiet 2 für  $\epsilon_2 > \epsilon_1$

Die Darstellung von Bild 3.2 geht davon aus, daß ungefähr  $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$  gilt. Die Feldstärken wurden aufgrund der Kontinuitätsgleichungen an Bild 3.1 angepaßt. Diese sind

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n2} \quad (3.8)$$

$$E_{t1} = E_{t2} = E_t \quad (3.9)$$

Aus Gl. 3.8 ergibt sich dann  $E_{n1} = 3 E_{n2}$ . Die Feldstärke  $E_2$  verläuft hier unter dem Winkel  $\alpha_2$  gegen die Normale. Dieser Winkel findet sich im roten Flächendreieck wieder. Dieses ist ähnlich zum Kräftedreieck, in dem daher ebenfalls der Winkel  $\alpha_2$  auftritt. Über Wechselwinkel an Parallelen ergibt sich, daß  $\alpha_2$  auch der Winkel zwischen  $\Delta F_2$  und  $E_2$  ist. Wie zuvor ist also die resultierende Kraft  $\Delta F_2$  gegen die Normale um den Winkel  $2\alpha_2$  verdreht, der durch  $E_2$  halbiert wird.

Damit sich diese Konstellation ergibt, mußte die Längskraft  $\Delta F_{l2}$  in Gegenrichtung zu  $E_2$  angetragen werden. Wie in Bild 3.1 weist sie damit in das Gebiet hinein. Die Querkomponente  $\Delta F_{q2}$  steht senkrecht auf  $E_2$  und weist vom Gebiet 2 weg.

Der Betrag von  $\Delta F_2$  hat, ganz analog wie zuvor, die Größe

$$\Delta F_2 = \sigma_2 \Delta A = \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \Delta A. \quad (3.10)$$

Die Komponenten von  $\Delta F_2$  in Normal- und Tangentialrichtung sind

$$\Delta F_{n2} = \Delta F_2 \sin(2\alpha_2 - 90^\circ) = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \Delta A \cos 2\alpha_2 \quad (3.11)$$

und

$$\Delta F_{t2} = -\Delta F_2 \cos(2\alpha_2 - 90^\circ) = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \Delta A \sin 2\alpha_2 \quad (3.12)$$

Die Komponente  $\Delta F_{n2}$  in Gl. 3.11 ist nur dann negativ, wenn  $2\alpha_2 < 90^\circ$  ist.

Der Vektor  $\Delta \mathbf{F}_2$  lautet damit

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \Delta F_{n2} \vec{n} + \Delta F_{t2} \vec{t} = -\frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot E_2^2 \cos 2\alpha_2 \Delta A \cdot \vec{n} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot E_2^2 \sin 2\alpha_2 \Delta A \cdot \vec{t} \quad (3.13)$$

Um die resultierende Gesamtkraft  $\Delta F$  an der Grenzschicht zu finden, kann man zunächst die Komponenten addieren. Es ergibt sich für die Tangentialkomponenten:

$$\Delta F_t \cdot \vec{t} = \Delta F_{t1} \cdot \vec{t} + \Delta F_{t2} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2 \Delta A \sin 2\alpha_1 \cdot \vec{t} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 E_2^2 \Delta A \sin 2\alpha_2 \cdot \vec{t} \quad (3.14)$$

Mit  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  läßt sich dafür schreiben

$$\Delta F_t \cdot \vec{t} = (\varepsilon_1 E_1 \sin \alpha_1 E_1 \cos \alpha_1 - \varepsilon_2 E_2 \sin \alpha_2 E_2 \cos \alpha_2) \Delta A \cdot \vec{t} \quad (3.15)$$

Aus den Bildern 1 und 2 liest man ab:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_{t1}$$

$$E_1 \cos \alpha_1 = E_{n1}$$

$$E_2 \sin \alpha_2 = E_{t2}$$

$$E_2 \cos \alpha_2 = E_{n2}$$

Damit erhält man

$$\Delta F_t \cdot \vec{t} = (\varepsilon_1 E_{t1} E_{n1} - \varepsilon_2 E_{t2} E_{n2}) \Delta A \cdot \vec{t} \quad (3.16)$$

Mit den Kontinuitätsbedingungen für die Grenzflächen nach den Gln. 3.8 und 3.9 ergibt sich

$$\Delta F_t \cdot \vec{t} = (\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_1 E_{n1}) E_t \Delta A \cdot \vec{t} = 0 \quad (3.17)$$

Die Tangentialkomponenten heben sich also auf. Für die Normalkomponenten folgt dagegen

$$\Delta \mathbf{F}_n = \Delta F_{n1} \vec{n} + \Delta F_{n2} \vec{n} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cdot E_1^2 \Delta A \cos 2\alpha_1 \cdot \vec{n} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot E_2^2 \Delta A \cos 2\alpha_2 \cdot \vec{n}$$



Mit der trigonometrischen Beziehung  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  folgt

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cdot (E_1^2 \cos^2 \alpha_1 - E_1^2 \sin^2 \alpha_1) \Delta A \vec{n} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot (E_2^2 \cos^2 \alpha_2 - E_2^2 \sin^2 \alpha_2) \Delta A \vec{n} \quad (3.18)$$

Mit Blick auf Bild 3.1 und 3.2 wird daraus

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cdot (E_{n1}^2 - E_{t1}^2) \Delta A \cdot \vec{n} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot (E_{n2}^2 - E_{t2}^2) \cdot \Delta A \cdot \vec{n} \quad (3.19)$$

Ausklammern von Termen ergibt

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1 \cdot (E_{n1}^2 - E_{t1}^2) - \varepsilon_2 \cdot (E_{n2}^2 - E_{t2}^2) \right] \cdot \Delta A \cdot \vec{n} \quad (3.20)$$

Mit den Kontinuitätsbedingungen der Gln. 3.8 und 3.9 wird daraus

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot E_t^2 + \varepsilon_1 E_{n1}^2 - \varepsilon_2 \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} E_{n1}^2 \right] \Delta A \cdot \vec{n} \quad (3.21)$$

Dies kann weiter umgeformt werden:

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot E_t^2 + \left( \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} \right) E_{n1}^2 \right] \Delta A \cdot \vec{n}$$

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot E_t^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1}^2 \right] \Delta A \cdot \vec{n}$$

Damit erhält man schließlich das bei Küpfmüller angegebene Ergebnis.

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \left( E_t^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1}^2 \right) \cdot \Delta A \cdot \vec{n} \quad (3.22)$$

Dieses stimmt mit Gl. 2.25 aus Abschnitt 2 überein.

## 4 Literatur

- 1 Paul: Grundlagen der Elektrotechnik 2 – Elektromagnetische Felder und ihre Anwendung. Springer-Vieweg, 2012
- 2 Karl Küpfmüller, Wolfgang Mathis, Albrecht Reibiger: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 19. Auflage, Springer-Vieweg Verlag, 2013
- 3 Maxwell stress tensor. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell\\_stress\\_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell_stress_tensor)
- 4 Ekkehard Bolte: Elektrische Maschinen. Springer Verlag, 2012
- 5 Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau. 14. Auflage. Springer Verlag, 1981

## 5 Nachtrag

Die bei Küpfmüller verwendete Zeichnung

